22　不等式への応用

基本問題 ＆ 解法のポイント

37

$\dfrac{2}{\pi}\leq \sin x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の証明

$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi}\left(0< x< \dfrac{\pi}{2}\right)$

ここで，$f'(\alpha)=\cos\alpha-\dfrac{2}{\pi}=0\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$\cos x$ は $0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$ において単調減少するから，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	0	↑	極大	↓	0

よって，$f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最小値は 0

ゆえに，$\dfrac{2}{\pi}\leq \sin x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\cos x\leq 1-\dfrac{1}{\pi}x^2\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の証明

$g(x)=1-\dfrac{1}{\pi}x^2-\cos x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{2}{\pi}x+\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

上の証明より，$g'(x)=-\dfrac{2}{\pi}x+\sin x>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，$g(x)=1-\dfrac{1}{\pi}x^2-\cos x\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調増加する。

ゆえに，$g(x)\geq g(0)=0$ すなわち $\cos x\leq 1-\dfrac{1}{\pi}x^2\left(0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

38

$x>0$ より，$a>\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ が成り立つような a の範囲を求めればよい。

$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}-\dfrac{\log x}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$ より，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\uparrow$	極大	$\downarrow$

よって，$\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ の最大値は $f(e^2)=\dfrac{2}{e}$

ゆえに，$a>\dfrac{2}{e}$ のとき任意の $x>0$ に対して $a>\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ が成り立つ。

A

129

(1)

$f(x)=x-2\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}$

よって，$x\geq 1$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↓	$2-2\log 2$	↑

これより，$x\geq 1$ における $f(x)$ の最小値は $2-2\log 2$ であり，

$2-2\log 2=\log\dfrac{e^2}{4}>\log 1=0$ だから，

$x\geq 1$ において $f(x)>0$ すなわち $x>2\log x$ が成り立つ。

(2)

解法 1

n が自然数であることと $e^{2n\log n}=e^{\log n^{2n}}=n^{2n}=\left(n^2\right)^n$ より，

$$\begin{aligned}(2n\log n)^n<e^{2n\log n}&\Leftrightarrow(2n\log n)^n<\left(n^2\right)^n\\&\Leftrightarrow 2n\log n<n^2\\&\Leftrightarrow 2\log n<n\end{aligned}$$

(1)より，$2\log n<n$ は真である。

よって，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ は真である。

解法 2

n は自然数だから，(1)より，$2\log n<n$ が成り立つ。

したがって，

$$\begin{aligned}2\log n<n&\Leftrightarrow 2n\log n<n^2\\&\Leftrightarrow 2n\log n<e^{\log n^2}\\&\Leftrightarrow 2n\log n<e^{2\log n}\\&\Leftrightarrow(2n\log n)^n<\left(e^{2\log n}\right)^n\\&\Leftrightarrow(2n\log n)^n<e^{2n\log n}\end{aligned}$$

130

(1)

$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left(\log\frac{x+1}{x}\right)'+\frac{1}{(x+1)^2}\\
&=\{\log(x+1)-\log x\}'+\frac{1}{(x+1)^2}\\
&=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\
&=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}\\
&=-\frac{1}{x(x+1)^2}\\
&<0
\end{aligned}$$

よって， $f(x)$ は単調減少する。

これと

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}\\
&=0
\end{aligned}$$

より， $x>0$ のとき $f(x)>0$ すなわち $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)

$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}=\left(1+\dfrac{1}{\frac{2002}{2001}}\right)^{\frac{2002}{2001}}$， $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}=\left(1+\dfrac{1}{\frac{2001}{2002}}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ より，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$ についての大小関係がわかればよい。

$a,\ b$ を正の数とすると， $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^a>\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^b \Leftrightarrow \log\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^a>\log\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^b$ がいえるので，

$g(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ とおくと，

$g'(x)=\left(x\log\dfrac{x+1}{x}\right)'$

$=[x\{\log(x+1)-\log x\}]'$

$=\log(x+1)-\log x+x\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$

(1)より，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$ だから，$g'(x)>0$

よって，$g(x)$は単調増加する。

ゆえに，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ も単調増加する。

これと $\dfrac{2002}{2001}>\dfrac{2001}{2002}$ より，$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}>\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$

131

(1)

$f(x)=e^{-x}-(1-x)$（$x\geq 1$）とおくと，

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$=\dfrac{-1+e^x}{e^x}$

≥ 0

よって，$f(x)$が単調増加する。

これと $f(0)=0$ より，$f(x)\geq 0$ すなわち $1-x\leq e^{-x}$（等号は $x=0$ のとき成立）

(2)

同じ選手同士の試合が起こってもよい場合の 2 選手の組合せ ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り。

同じ選手同士の試合が一度も起こらない場合，

試合の度に 2 選手の組合せが 1 つずつ減っていくから，

k 回目の試合の組合せは ${}_n\mathrm{C}_2-(k-1)$

よって，k 回目の試合で同じ選手同士の試合が起こらない確率を p_k とすると，

$p_k=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2-(k-1)}{{}_n\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}$

ここで，(1)および $\dfrac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}\geq 0$ より，$1-\dfrac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}\leq e^{-\frac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}}$

$\therefore p_k\leq e^{-\frac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}}$（等号は $k=1$ のとき成立）

これと n （$n \geq 3$）回試合を行うとき，同じ選手同士の試合が一度も怒らない確率は

$p_1 \cdot p_2 \cdot\cdots\cdot p_k \cdot\cdots\cdot p_n$ より，

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot p_2 \cdot\cdots\cdot p_k \cdot\cdots\cdot p_n &> e^0 \cdot e^{-\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}} \cdot\cdots\cdot e^{-\frac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2}} \cdot\cdots\cdot e^{-\frac{n-1}{{}_n\mathrm{C}_2}} \\
&= e^{-{}_n\mathrm{C}_2 \sum_{k=1}^{n}(k-1)} \\
&= e^{-\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2!}} \cdot \frac{n(n-1)}{2}} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

ゆえに，同じ選手同士の試合が一度も起こらない確率は $\dfrac{1}{e}$ より小さい。

132

(1)

$f(x) = -x - \log(1-x) \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，

$f'(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x}{1-x} \geq 0 \quad \left(\because 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

これと $f(0) = 0$ より，$0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ において，$f(x) \geq 0$ すなわち $\log(1-x) \leq -x$ ・・・①

$g(x) = \log(1-x) - (-x^2 - x) \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，

$g'(x) = -\dfrac{1}{1-x} + 2x + 1 = \dfrac{2x\left(\dfrac{1}{2} - x\right)}{1-x} \geq 0 \quad \left(\because 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right)$ より，$g(x)$ は単調に増加する。

これと $g(0) = 0$ より，$0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ において，$g(x) \geq 0$ すなわち $-x^2 - x \leq \log(1-x)$ ・・・②

①，②より，$0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ において，$-x^2 - x \leq \log(1-x) \leq -x$ が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned}
\log a_n &= \log\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + \log\left(1 - \frac{2}{2n^2}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{n}{2n^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{k}{2n^2}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$1 \leq k \leq n$ より，$0 < \dfrac{k}{2n^2} \leq \dfrac{n}{2n^2} = \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{2}$

したがって，(1)より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2}\right\}\leq\log a_n\leq\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right)$が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2}\right\}&=-\frac{1}{4n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=-\frac{1}{4n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=-\frac{1}{24n}\frac{n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4}\frac{n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=-\frac{1}{24n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{k}{2n^2}\right)^2-\frac{k}{2n^2}\right\}=-\frac{1}{4}\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right)&=-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{2n^2}\right)=-\frac{1}{4}\quad\cdots②$$

①，②および，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=-\frac{1}{4}$　$\displaystyle\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{1}{4}}$

B
133

$\cos\theta + a^3\sin\theta = \sqrt{a^6+1}\cos(\theta-\phi)\ \left(\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{a^6+1}},\ \sin\phi = \dfrac{a^3}{\sqrt{a^6+1}},\ a>0\right)$ より，$0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$

これと $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{2}<-\phi\le\theta-\phi\le\dfrac{\pi}{2}-\phi<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\cos\theta + a^3\sin\theta = \sqrt{a^6+1}\cos(\theta-\phi)>0$

したがって，$k\ge\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+a^3\sin\theta}\ \left(a>0,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす k の最小値を求めればよい。

そこで，$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+a^3\sin\theta}\ \left(a>0,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$f(\theta)$ の最大値を求める。

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= \frac{(\sin\theta\cos\theta)'(\cos\theta+a^3\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+a^3\sin\theta)'}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{\cos2\theta(\cos\theta+a^3\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta(-\sin\theta+a^3\cos\theta)}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{\cos2\theta\cos\theta+a^3\cos2\theta\sin\theta+\sin^2\theta\cos\theta-a^3\sin\theta\cos^2\theta}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{\cos\theta(\cos2\theta+\sin^2\theta)+a^3\sin\theta(\cos2\theta-\cos^2\theta)}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{\cos^3\theta-a^3\sin^3\theta}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{(\cos\theta-a\sin\theta)(\cos^2\theta+a\sin\theta\cos\theta+a^2\sin^2\theta)}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\\
&= \frac{\sqrt{a^2+1}\cos(\theta+\alpha)\left\{(\cos\theta-a\sin\theta)^2+3a\sin\theta\cos\theta\right\}}{(\cos\theta+a^3\sin\theta)^2}\ \left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)
\end{aligned}
$$

より，$0<\alpha\le\theta+\alpha\le\dfrac{\pi}{2}+\alpha<\pi$　また，$(\cos\theta-a\sin\theta)^2+3a\sin\theta\cos\theta>0$

よって，

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき $f'(\theta)=0$

$\theta+\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき $f'(\theta)>0$

$\theta+\alpha>\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta>\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき $f'(\theta)<0$

したがって，$f(\theta)$ 増減は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(\theta)$	0	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	0

これと

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+a^3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+a^3\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha+a^3}$$

$$=\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{a+a^3}$$

$$=\frac{1}{\left(a^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\left(a^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$$

および $k\geq f(\theta)\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ より，

$$k\geq\left(a^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$$

よって，k の最小値は $\left(a^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$

134

(1)

$t>0$ より，$\dfrac{e^t-1}{t}\geq e^{\frac{t}{2}}$ と $e^t-1\geq te^{\frac{t}{2}}$ は同値である。

したがって，$e^t-1\geq te^{\frac{t}{2}}$ すなわち $e^t-te^{\frac{t}{2}}-1\geq 0$ を示せばよい。

$f(t)=e^t-te^{\frac{t}{2}}-1$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}-e^{\frac{t}{2}}$$
$$=e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}-1\right)$$

ここで，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{t}{2}-1$ とおくと，

$g'(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)>0\ (\because t>0)$ より，

$g(t)>g(0)=0$　すなわち $e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{t}{2}-1>0$

これと $e^{\frac{t}{2}}>0$ より，$f'(t)>0$

よって，$f(t)>f(0)=0$

ゆえに，すべての $t>0$ に対して不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

(2)

(1)と同様にして，すべての $t>0$ に対して $e^t-te^{\frac{t}{a}}-1\geq 0$ となるような a の範囲を求める。

$h(t)=e^t-te^{\frac{t}{a}}-1$ とおくと，

$$h'(t)=e^t-\frac{t}{a}e^{\frac{t}{a}}-e^{\frac{t}{a}}$$
$$=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{t}{a}-1\right)$$

ここで，$i(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{t}{a}-1$ とおくと，

$$i'(t)=\frac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a}$$
$$=\frac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a-1}\right)$$

また，$\frac{a-1}{a}>0$，$t>0$ より，$e^{\frac{a-1}{a}t}>1$

$0<\frac{1}{a-1}\leq 1$ のとき

$e^{\frac{a-1}{a}t}>\frac{1}{a-1}$ より，$i'(t)>0$　$\therefore i(t)>i(0)=0$

これより，$h'(t)=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{t}{a}-1\right)>0$

ゆえに、$h(t)>h(0)=0$

すなわち，すべての $t>0$ に対して不等式 $\frac{e^t-1}{t}\geq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

また，これが成り立つ a の範囲は $0<\frac{1}{a-1}\leq 1$ を解くことにより，$a\geq 2$ である。

$1<\frac{1}{a-1}$ のとき

$i''(t)=\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 e^{\frac{a-1}{a}t}>0$ より，$i'(t)$ は単調に増加する。

また，$i'(0)=\frac{a-1}{a}\left(1-\frac{1}{a-1}\right)<0$，$\lim_{t\to\infty} i'(t)=\infty$

よって，$i'(t)=0$ となるような t の値がただ 1 つ存在する。
そこで，この値を α とおくと，$i(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$i'(t)$	/	$-$	0	$+$
$i(t)$	0	↓	極小	↑

よって，$0<t\leq\alpha$ のとき，$i(t)<i(0)=0$ より，$h'(t)=e^{\frac{t}{a}}i(t)<0$　$\therefore h(t)<h(0)=0$

ゆえに，このとき不等式 $\frac{e^t-1}{t}\geq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立たない。

また，不等式が成り立たない a の範囲は $1<\frac{1}{a-1}$ かつ $a>1$ より，$1<a<2$

以上より，求める a の範囲は $a\geq 2$

135

(1)

$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ $(x\geq 1)$ とおくと，

$$f'(x)=\log x-\log(x+1)+\frac{2}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{x(x+1)^2}\leq 0$$

よって，$f'(x)$ は単調減少する。

これと

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\frac{2}{x+1}\right)$$

$$=0$$

より，$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は単調増加する。

これと $f(1)=0$ より，$f(x)\geq 0$

すなわち，$x\geq 1$ のとき $x\log x\geq(x-1)\log(x+1)$ が成り立つ。

(2)

$2\log n!\geq n\log n$ ならば $(n!)^2\geq n^n$ が成り立つから，

$2\log n!\geq n\log n$ を数学的帰納法で示す。

【1】 $n=1$ のとき

$2\log 1!=0$，$1\log 1=0$ より，$2\log n!\geq n\log n$ が成り立つ。

【2】 $n=k$ のとき $2\log n!\geq n\log n$ が成り立つと仮定すると，$2\log k!\geq k\log k$ が成り立つ。

$n=k+1$ のとき

$$2\log(k+1)!=2\log(k+1)+2\log k!$$
$$\geq 2\log(k+1)+k\log k$$

ここで，(1)より，$k\log k\geq(k-1)\log(k+1)$

よって，

$$2\log(k+1)!\geq 2\log(k+1)+k\log k$$
$$\geq 2\log(k+1)+(k-1)\log(k+1)$$
$$=(k+1)\log(k+1)$$

ゆえに，$n=k+1$ のときも $2\log n!\geq n\log n$ が成り立つ。

【1】，【2】より，自然数 n に対し $2\log n!\geq n\log n$ が成り立つ。

ゆえに，自然数 n に対し $(n!)^2\geq n^n$ が成り立つ。